prova scritta MATEMATICA valida per A047 e A049

QUESITO 1

Si mostri che per ogni polinomio $P(x)$ di grado dispari e per ogni numero reale k esiste almeno una soluzione reale x dell'equazione $P(x) = k$. Si disegni poi il grafico qualitativo della funzione $f(x) = 4x^5 - 5x$, definita sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, e si stabilisca il numero degli elementi dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = k\}$, in dipendenza dal valore di $k \in \mathbb{R}$. Utilizzando le proprietà delle funzioni continue e delle funzioni derivabili si diano motivazioni rigorose per le affermazioni che vengono fatte.

QUESITO 2

Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

e si diano una descrizione algebrica e una interpretazione geometrica dell'insieme delle soluzioni di ciascuna equazione e del sistema. Si scriva una equazione lineare nelle incognite x, y, z, diversa da quelle scritte sopra, che, aggiunta al sistema, ne lascia invariato l'insieme delle soluzioni. Si scriva inoltre una equazione lineare nelle incognite x, y, z che aggiunta al sistema iniziale lo rende impossibile (ossia non ci sono terne (x, y, z) che soddisfano le due equazioni iniziali e anche quella aggiunta). Si dia una interpretazione geometrica dell'equazione che si è aggiunta, in ciascuno dei due casi indicati.

QUESITO 3

Si definiscano la divisione con resto tra i polinomi a coefficienti reali e la divisione con resto tra gli interi, mettendo in luce le analogie tra le due situazioni. Si descriva l'algoritmo di Euclide per la determinazione del massimo divisore comune di due interi e si spieghi perché produce in effetti il MCD. Si indichino possibili motivazioni, applicazioni, attività di laboratorio, riferimenti all'origine storica dell'algoritmo nella misura delle grandezze

QUESITO 4

Fissato un numero $\sigma > 0$, si consideri la funzione distribuzione *gaussiana* (o *normale*)

$$g(x) \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)^2}$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, della quale si assume noto che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \;=\; 1.$

1. Si disegni il grafico qualitativo della funzione g indicando la posizione dei flessi.
2. Si disegni il grafico qualitativo della funzione
$$f(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$
3. Si mostri che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx \;=\; 0$$
4. Si mostri, indicando solo i passi essenziali, che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx \;=\; \sigma^2$$
5. Si indichi il significato che, nel contesto della teoria della Probabilità, hanno le funzioni g ed f, il parametro σ e gli integrali che si trovano nei punti 3 e 4.